

Participantes, Palestras, Minicursos e Resumos do III EPGMAT UFBA 2015

<http://www.encontropgmat.ufba.br/>

Nome	Origem	Email
Andrew Clarke	Univ. Federal do Rio de Janeiro	andrew@im.ufrj.br
Dirk Erhard	Univ. Warwick (Reino Unido)	D.Erhard@warwick.ac.uk
Edson Alberto Coayla Teran	Univ. Federal da Bahia	coayla@ufba.br
Ernani Souza Ribeiro Jr.	Univ. Federal do Ceará	ernani@mat.ufc.br
Fagner Bernardini Rodrigues	Univ. Fed. do Rio Grande do Sul	fagnerbernardini@gmail.com
Gastão Silves Ferreira Frederico	Univ. de Cabo Verde	gastao.frederico@ua.pt
Ian Melbourne	Univ. Warwick (Reino Unido)	I.Melbourne@warwick.ac.uk
Keti Tenenblat	Univ. de Brasília	K.Tenenblat@mat.unb.br
Luciano Mari	Univ. Federal do Ceará	mari@mat.ufc.br
Manuel Stadlbauer	Univ. Federal de Alagoas	manuel.stadlbauer@gmail.com
Manuela Souza	Univ. Federal da Bahia	manuela.dss@gmail.com
Mohammad Soufi	Univ. Federal de Alagoas	msoufin@gmail.com
Nasim Karimi	Univ. Federal de Alagoas	msoufin@gmail.com
Paulo Canas	Univ. Federal da Bahia	paulocanas@gmail.com
Simon Chiossi	Univ. Federal da Bahia	simon.chiossi@polito.it
Tertuliano Franco	Univ. Federal da Bahia	francotertu@gmail.com
Paulo Varandas	Univ. Federal da Bahia	pcvarand@gmail.com
Samuel Gomes da Silva	Univ. Federal da Bahia	samuel@ufba.br
Thiago Bomfim	Univ. Federal da Bahia	tbnunes@ufba.br

De 14 a 18 de setembro de 2015

	Horários III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA 2015				
	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
09:00	Luciano Mari	Andrew Clarke	Manuela Souza	Paulo Canas	Tertuliano Franco
09:50	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break
10:00	Simon Chiossi	Edson Coayla	Nasim Karimi	Fagner Rodrigues	Dirk Erhard
10:50	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break
11:00	Keti Tenenblat	Gastão Frederico	Mohammad Soufi	Manuel Stadlbauer	Ian Melbourne
12:00	Almoço	Almoço	Almoço/Foto	Almoço	Almoço
14:00	Ernani Ribeiro	Minicurso Paulo/Thiago	Minicurso Paulo/Thiago	Minicurso Paulo/Thiago	Minicurso Paulo/Thiago
15:00	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Coffee-break	Encerramento
15:10	Minicurso Paulo/Thiago	Minicurso Samuel	Minicurso Samuel	Minicurso Samuel	
17:00			Poster		

Palestrante: Andrew Clarke (Univ. Federal do Rio de Janeiro)

Email: andrew@im.ufrj.br

Título: Instantons on the manifolds of Bryant and Salamon

Resumo: We give a construction of G_2 instantons on one of the manifolds of Bryant and Salamon, using an ansatz of spherical symmetry coming from the space being a rank-4 vector bundle. We show that the connections are asymptotic to a HYM connection on the nearly Kaehler $S^3 \times S^3$.

Palestrante: Dirk Erhard (Univ. Warwick (Reino Unido))

Email: D.Erhard@warwick.ac.uk

Título: The parabolic Anderson model in a dynamic random environment: random conductances

Resumo: The parabolic Anderson model is a differential equation, which describes the evolution of a field of particles performing independent nearest neighbor simple random walks with binary branching: particles jump at rate κ , $\kappa > 0$, split into two and die at rates determined by a random environment. We denote by $u(x,t)$ the mean number of particles at site x at time t conditioned on the evolution of the environment. In this talk I will discuss a modified version of this model. More precisely I introduce the case in which the random walks move according to random walks among a field of random conductances $\{\kappa(x,y)\}_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$. For specific choices of the environment I will discuss a link between the exponential growth rate of the number of particles at the origin for the original model to the one of the modified model. This is joint work in progress with Frank den Hollander (Leiden) and Gregory Maillard (Marseille).

Palestrante: Edson Alberto Coayla Teran (Univ. Federal da Bahia)

Email: coayla@ufba.br

Título: Controle ótimo para equações diferenciais estocásticas com memória

Resumo: Este trabalho está dedicado ao estudo do problema de controle ótimo de equações diferenciais estocásticas com memória (EDEMs) usando a fórmula de Dynkin e a solução do problema Dirichlet-Poisson, também derivamos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) e sua recíproca.

Palestrante: Ernani Souza Ribeiro Jr. (Univ. Federal do Ceará)

Email: ernani@mat.ufc.br

Título: Rigidez de variedades de einstein de dimensão quatro

Resumo: Um problema clássico em Geometria é classificar variedades de dimensão quatro, tanto do ponto de vista geométrico quanto topológico. Um problema bem conhecido é classificar as variedades compactas de Einstein de dimensão quatro. Nesta palestra, apresentaremos uma série de resultados obtidos por vários matemáticos nos últimos 40 anos sobre este tema. Além disso, baseado em dois problemas diretamente relacionados, um proposto por S.-T. Yau em 1990 e um outro proposto por D. Yang em 2000, vamos mostrar que se a curvatura seccional de uma variedade compacta de Einstein (normalizada) de dimensão quatro satisfaz uma certa desigualdade, então ela é isométrica à esfera de dimensão 4 com métrica canônica, ou ao espaço CP^2 com métrica Fubini-Study. Além disso, vamos mostrar que se todas as curvatura seccionais de uma variedade compacta de Einstein de dimensão quatro estão no intervalo $[1/10, 1]$, então ela é topologicamente a esfera de dimensão 4 ou CP^2 .

Palestrante: Fagner Bernardini Rodrigues (Univ. Federal do Rio Grande do Sul)

Email: fagnerbernardini@gmail.com

Título: Especificação e propriedades termodinâmicas para ações de semigrupos

Resumo: Nesta palestra abordaremos o estudo de algumas propriedades termodinâmicas de ações contínuas de semigrupos finitamente gerados sobre um espaço compacto. Trataremos de uma noção de entropia e pressão topológica que não depende do crescimento do grupo e introduziremos para tais ações as propriedades de especificação orbital. Mostraremos que ações com tal propriedade têm entropia topológica positiva. Além disso apresentaremos alguns resultados relacionados à regularidade da função pressão e mostraremos como a entropia topológica e o crescimento exponencial dos pontos periódicos estão relacionados para o caso de semigrupos de aplicações expansoras. Os resultados encontram-se no preprint: "Specification and thermodynamical properties of semigroup actions" em colaboração com Paulo Varandas.

Palestrante: Gastão Silves Ferreira Frederico (Univ. de Cabo Verde)

Email: gastao.frederico@ua.pt

Título: A Non-Differentiable Quantum Variational Embedding in Presence of Time Delays

Resumo: We develop Cresson's non-differentiable embedding to quantum problems of the calculus of variations and optimal control with time delay. Main results show that the dynamics of non-differentiable Lagrangian and Hamiltonian systems with time delays can be determined, in a coherent way, by the least-action principle.

Palestrante: Ian Melbourne (Univ. Warwick (Reino Unido))

Email: I.Melbourne@warwick.ac.uk

Título: Averaging and Rates of Averaging for Uniform Families of Deterministic Fast-Slow Skew Product Systems

Resumo: In a joint work with Alexey Korepanov and Zemer Kosloff, we consider families of fast-slow skew product maps of the form $x_{n+1} = x_n + \epsilon a(x_n, y_n, \epsilon)$; $y_{n+1} = T_\epsilon y_n$, where T_ϵ is a family of nonuniformly expanding maps, and prove averaging and rates of averaging for the slow variables x as ϵ tends to 0. Similar results are obtained also for continuous time systems $x' = a(x, y, \epsilon)$; $y' = g_\epsilon(y)/\epsilon$. Our results include cases where the family of fast dynamical systems consists of intermittent maps, unimodal maps (along the Collet-Eckmann parameters) and Viana maps.

Palestrante: Luciano Mari (Univ. Federal do Ceará)

Email: mari@mat.ufc.br

Título: On the spectrum of minimal submanifolds

Resumo: The aim of this talk is to survey on recent works on the spectrum $\sigma(M)$ of a minimal submanifold in a space form of curvature $k \leq 0$. The results, made in collaboration with various colleagues in Brazil, focus both on bounded and on unbounded, proper immersions. Sharp conditions for the discreteness of $\sigma(M)$ are given, as well as conditions to guarantee that $\sigma(M)$ equals a certain interval of the real line for a totally geodesic slice. Conditions are given in terms of the Hausdorff dimension of the limit set $\lim \phi$, and on the behaviour at infinity of the density function. Our criteria apply to various examples constructed in the literature, giving a fairly exhaustive answer to a question posed by S.T. Yau in his Millenium lecture.

Palestrante: Manuel Stadlbauer (Univ. Federal de Alagoas)

Email: manuel.stadlbauer@googlemail.com

Título: Processos de Markov, convergência geométrica e decaimento de correlações.

Resumo: Os métodos bem-conhecidos na teoria de sistemas dinâmicos para obter decaimento de correlações baseiam-se ou na contração da métrica projetiva de Birkhoff (1957) ou num argumento de Doeblin-Fortet (1937) para mostrar que o operador de transfer é quase-compacto. Porém, na teoria dos processos de Markov, existem métodos alternativos para mostrar uma propriedade análoga, a convergência geométrica. Na palestra, o método novo de Hairer-Mattingly será apresentado. O método utiliza a dualidade de Kantorovich, e pela adaptação aos sistemas dinâmicos obtém-se uma prova alternativa e robusta do decaimento de correlações, aplicável, por exemplo, aos espaços de shift aleatórios e não-estacionários. Além disso, é independente de uma desigualdade de tipo Lasota-Yorke.

Palestrante: Keti Tenenblat (Univ. de Brasília)

Email: K.Tenenblat@mat.unb.br

Título: Equações que descrevem superfícies pseudo-esféricas e imersões isométricas.

Resumo: Não fornecido

Palestrante: Manuela Souza (Univ. Federal da Bahia)

Email: manuela.dss@gmail.com

Título: Propriedade de Specht para álgebras de Jordan graduadas

Resumo: Uma variedade V em uma classe de álgebras tem a propriedade de Specht, se toda subvariedade de V pode ser definida por um sistema finito de identidades polinomiais. Quando isso ocorre, dizemos também que o ideal das identidades de V satisfaz a propriedade de Specht. Em 1987, Kemer provou que toda variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica 0 tem essa propriedade. Para álgebras de Lie e de Jordan, pouco se sabe a respeito. Nesta palestra abordaremos resultados recentes que tratam da propriedade de Specht de certas variedades de álgebras de Jordan graduadas. Os métodos utilizadas são de teoria de invariantes, representações do grupo geral linear e conjuntos quase bem ordenados.

Palestrante: Mohammad Soufi (Univ. Federal de Alagoas)

Email: msoufin@gmail.com

Título: Statistical stability in chaotic dynamics

Resumo: As it is known, chaos can happen even in a simple deterministic dynamical system. In a chaotic dynamical system there is no hope to inspect stable behaviour of orbits due to its sensitive dependence on initial condition. But statistically we can make predictions of the asymptotic behaviour of orbits, in the sense that the time average of evaluating a continuous function along orbits converges to its space average for almost every point. This is due to the existence of an SRB measure. Now an interesting question would be statistical stability of a chaotic dynamical system, i.e. the study of the continuous variation of the SRB measures with respect to the dynamics. In this talk, we present some results on the statistical stability for families of chaotic dynamical systems. Quadratic maps and Lorenz flows will be considered in more detail.

Palestrante: Nasim Karimi (Univ. Federal de Alagoas)

Email: msoufin@gmail.com

Título: Depth parameters of a finite semigroup and diameter of a direct power of a finite group

Resumo: We are interested in two parameters involving the length of elements in terms of a generating set. One is the minimum length of elements in the minimum ideal (kernel) of a finite semigroup and the other is the diameter of a direct power of a finite group. In the first part of the talk we introduce the depth parameters of a finite semigroup, which measure how hard it is to produce an element in the minimum ideal when we consider generating sets satisfying some minimality conditions. The results concerning the estimation of these parameters and their behaviour with respect to the products will be explained. In the second part we present two conjectures concerning the diameter of a direct power of a finite group. The first conjecture states that the diameter of G^n with respect to any generating set is at most $n(|G| - \text{rank}(G))$; and the second one states that there exists a generating set A , of minimum size, for G^n such that the diameter of G^n with respect to A is at most $n(|G| - \text{rank}(G))$. We will establish evidence for each of the above mentioned conjectures. Furthermore, will be mentioned to the importance of this investigation which is motivated by cerny conjecture, that is one of the most famous conjectures in the theory of finite automata.

Palestrante: Paulo Canas (Univ. Federal da Bahia)

Email: paulocanas@gmail.com

Título: Uma visão global da Análise Espetral Singular

Resumo: A análise Espetral Singular (SSA, do Inglês singular spectrum analysis) é uma técnica não-paramétrica para analisar dados sob a forma de séries temporais. A SSA é uma extensão da análise de componentes principais que permite a decomposição de uma série temporal univariada na soma de várias componentes independentes, que podem ser interpretadas como tendência, sazonalidade e ruído. Nesta palestra, irei apresentar uma visão global desta técnica e mostrar a sua utilidade em várias áreas do conhecimento, como climatologia, economia e produção industrial.

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Palestrante: Simon Chiossi (Univ. Federal da Bahia)

Email: simon.chiossi@polito.it

Título: Ataque Spin! (Quando os espinores conquistaram a geometria diferencial)

Resumo: Vou tentar convencê-los como os espinores simplificam o estudo de muitas classes de variedades diferenciais, usando exemplos.

Palestrante: Tertuliano Franco (Univ. Federal da Bahia)

Email: francotertu@gmail.com

Título: Hydrodynamic limit of quantum random walks

Resumo: The quantum random walk (QRW) is a famous model with applications in quantum optics, quantum computation and more. It is known that the QRW is faster than its classical counterpart, the usual random walk. We obtain in this work the hydrodynamic limit of independent QRW's and prove that, in some sense, its macroscopic evolution is slower than in the classical setting. Joint work with Baraviera (UFRGS) and Neumann (UFRGS).

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Participante: Andrêssa Lima de Souza (UFBA)

Email: andressalima.mat@gmail.com

Título do Pôster: Recorrência Exponencialmente Lenta para aplicações unidimensionais, expansoras por pedaços Hölder -C1

Resumo do Pôster: Provamos recorrência exponencialmente lenta para mapas unidimensionais obtidas a partir da redução de um fluxo definido em uma variedade tri-dimensional admitindo um atrator singular hiperbólico.

Participante: Alejandra Alderete (UFBA)

Email: argentina.ale@gmail.com

Título do Pôster: Códigos de grupo abeliano

Resumo do Pôster: Este trabalho forma parte da pesquisa de doutorado de Alejandra Alderete sobre a orientação do Prof. Dr. Thierry Corrêa Petit Lobão. Investigamos um método geral que permite decidir quando um código linear dado é um código de grupo (lateral), e neste caso, determinar o grupo associado ao código. Este procedimento deverá explorar o fato de que a estrutura de código de grupo de um código linear C está determinada pelo grupo de automorfismos por permutação, $\text{PAut}(C)$, determinada pelo código. Como uma aplicação direta do método estudamos os G -códigos nos quais G é um grupo que tem decomposição abeliana; investigamos ainda quando é possível obterem-se códigos de grupo equivalentes a estes no caso em que o código é determinado por um grupo que admite decomposição apropriada.

Participante: Elen Deise Assis Barbosa (UFBA)

Email: assiselen@yahoo.com.br

Título do Pôster: Anéis Limpos

Resumo do Pôster: Neste trabalho, definiremos um anel limpo, algumas classes de anéis limpos e daremos algumas propriedades acerca desses anéis. Motivados pela definição de anéis limpos, apresentaremos uma nova classe de anéis: anéis o-limpos e exibiremos alguns resultados obtidos sobre tal classe.

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Participante: Diogo Soares Dórea da Silva (UFBA)

Email: dsdorea@gmail.com

Título do Pôster: Percolation, Lattice Animals and Large Deviations

Resumo do Pôster: As principais funções θ , χ e κ da Percolação podem ser expressas em termos da distribuição $|C|$ de vértices no aglomerado que contém a origem. Neste pôster, nós apresentamos o trabalho de dissertação, concluso no mês de agosto, que aborda estimativas de grandes desvios de $|C|$ e alguns problemas em aberto a serem considerados.

Participante: Danilo Oliveira Almeida (UFBA)

Email: dansaj_almeida@hotmail.com

Título do Pôster: Medida conforme no bordo ideal de um grafo

Resumo do Pôster: A definição de medida conforme, surgiu em 1976 com Patterson no trabalho The limit set of a Fuchsian group. Mais tarde, em 1992 no artigo On existence of conformal measures Denker e Urbanski, dar uma nova abordagem sobre as medidas conformes, definindo-as como: Dado $T: X \rightarrow X$ um endomorfismo mensurável sobre o espaço $(X; B)$ e $f: X \rightarrow [0; 1)$, uma função mensurável. Dizemos que μ é conforme se $\mu(T(A)) = \int_A f d\mu$; onde A pertence B tal que $T: A \rightarrow T(A)$ é inversível. Utilizando a definição acima e algumas ideias de Denker e Urbanski, nesse trabalho damos algumas caracterizações para a existência desta medida nas árvores enraizadas, onde definimos como sendo um grafo orientado, $G = (V; E)$, em que existe um único vértice o , tal que para qualquer vértice $v \in V$ existe um único caminho entre o e v . Com o intuito de mostrar uma aplicação da teoria estudada, fizemos uma associação entre árvore enraizada com o odômetro. Obtendo assim, dois teoremas onde estabelecem critérios em que a medida conforme associada a árvore é ergódica ou equivalente a única medida de probabilidade invariante.

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Participante: Edward Landi Tonucci (UFBA)

Email: edward_landi@yahoo.com.br

Título do Pôster: Anticomutatividade dos Elementos Simétricos sob Involuções Orientadas Generalizadas

Resumo do Pôster: Dada uma involução em um anel de grupo RG , definimos os conjuntos dos elementos simétricos e antissimétricos, $(RG)^\phi$ e $(RG)^{\square-\square\phi}$, respectivamente. Sob certas condições de R , G ou da involução em RG , vários autores obtiveram que algumas propriedades encontradas em $(RG)^\phi$ ou em $(RG)^{\square-\square\phi}$ podem ser levantadas para todo o anel de grupo RG e, em alguns casos, dado a impossibilidade de tal levantamento, descreveram as estruturas básicas dos anéis de grupo que satisfazem tais propriedades. Generalizando os resultados encontrados na literatura, iremos explorar a involução $\square\square$, a chamada involução orientada generalizada, exibindo a estrutura dos grupos, assim como as condições sob os anéis, tais que $(RG)^{\square\square}$ ou $(RG)^{\square-\square\square\square}$ sejam anticomutativos.

Participante: Felipe Fonseca dos Santos (UFBA)

Email: felipefonsantos@gmail.com

Título do Pôster: Example of measure SRB-Like

Resumo do Pôster: We present the construction of a map $f:S^1 \rightarrow S^1$ C^1 -expanding that has some SRB-Like measures associated with f . Moreover, such measures are absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, showing that f is not generic.

Participante: Guido Gutierrez Mamani (UFBA)

Email: doguigut@gmail.com

Título do Pôster: As potências da distribuição delta de Dirac.

Resumo do Pôster: Nosso trabalho tem por objetivo estabelecer a potência da distribuição Delta de Dirac usando o cálculo fracionário.

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Participante: Jacqueline Costa Cintra (UFBA)

Email: jack_b_lo@hotmail.com

Título do Pôster: A Propriedade do Normalizador em Produtos Orlados

Resumo do Pôster: A determinação do normalizador do grupo gerador de um anel de grupo em seu grupo de unidades é uma questão que se impõe naturalmente. Em anéis de grupo integrais, em particular, observou-se que, para importantes classes de grupos finitos, este normalizador é minimal, ou seja, $N U(G) = G \cdot Z$. Quando tal ocorre, diz-se que o grupo em questão e seu anel de grupo integral satisfazem a propriedade do normalizador, conhecida como (Nor). O nosso objetivo neste trabalho é o de verificar a possibilidade de solução de (Nor) em produtos orlados sempre que tais grupos componentes sejam soluções de (Nor).

Participante: Mariana Silva Tavares (UFBA)

Email: maritavares__@hotmail.com

Título do Pôster: Fluctuations of d-dimensional symmetric exclusion with a slow interface

Resumo do Pôster: We consider the exclusion process in dimension greater than 2 in the presence of a slow interface. The rates of jump are one for all bonds, except for the bonds crossing the interface, which have parameter of order $1/N$ times the cosine of the angle of incidence, as considered in the paper Franco/Neumann/Valle'11. In that paper, it was obtained the hydrodynamical limit of the spatial density of particles. We present a work in progress on fluctuations of this model, generalizing the result of Franco/Gonçalves/Neumann'14.

Palestrantes, títulos e resumos do III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (2015)

Participante: Luana Amaral Gurgel (UFBA)

Email: lu_amaral_14@hotmail.com

Título do Pôster: Hydrodynamic Limit of Totally Asymmetric Exclusion Processes

Resumo do Pôster: In this work (in progress), we review classical results on the hydrodynamic limit of totally asymmetric exclusion processes through last-passage percolation techniques. Our goal is to investigate the open question of how strong a slow bond (in TASEP) has to be in order to imply a macroscopical effect.

Participante: Tulio Vales Deslandes Ferreira (UFBA)

Email: tuliovdendeslandes@hotmail.com

Título do Pôster: Estabilidade de Sistemas Dinâmicos não Determinísticos

Resumo do Pôster: Neste trabalho definimos um sistema dinâmico não determinístico como uma aplicação $\phi : X \rightarrow P(X)$ onde X é uma variedade Riemanniana compacta. Vamos estabelecer uma equivalência combinatória entre aplicações abertas para caracterizar estabilidade combinatória.

Minicurso

Entendendo o Caos

III Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA

Setembro de 2015

Por Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (UFBA, paulo.varandas@ufba.br)

e Thiago Bomfim São Luiz Nunes (UFBA, tbnunes@ufba.br)

Resumo:

Podemos dizer que a área de sistemas dinâmicos teve seu nascimento com os trabalhos marcantes de Henri Poincaré no início do século XX e o problema dos 3 corpos na busca de responder a seguinte questão: o sistema solar é estável?

Nascida da necessidade de compreender os fenômenos da mecânica celeste, física, biologia entre outras áreas do saber, a área de sistemas dinâmicos permanece ainda como uma área interdisciplinar, de conexão entre outras áreas do saber como a Álgebra e a Análise, a Topologia e a Geometria.

Avançando na história pelos trabalhos de Poincaré, Denjoy, Sharkovski, Smale e Palis, entre outros, pretendemos explicar como algumas das idéias de como surgiu a noção de Caos e de como este tem vindo a ser 'domado' ao longo dos anos.

Este minicurso introdutório é direcionado a alunos de graduação e de mestrado, sendo que os pré-requisitos se resumem a conhecimentos básicos de funções de variável real e de álgebra. Durante o minicurso serão deixados alguns exercícios auxiliares e os alunos vão contar com um monitor para tirarem dúvidas.

Conteúdos por aula: [Cinco encontros de uma hora]

- 1. Início da história, Poincaré e o problema dos 3 corpos, caoticidade, expansividade e conjecturas de Palis e Smale*
- 2. Aplicações do intervalo e do círculo, período 3 implica caos, número de rotação e teoremas de Denjoy e Poincaré*
- 3. Estabilidade de pontos fixos de aplicações do intervalo, conjugações topológicas e primeiras ideias de estabilidade, aplicações expansoras (ordem e caos)*
- 4. Aplicações à teoria dos números e combinatória: problemas de equidistribuição em expansão decimal e frações contínuas, aplicação de Gauss e a teoria ergódica como ferramenta*
- 5. A praia de Copacabana e uma ferradura para a História, estabilidade estrutural e perspectiva(s) futura(s) da teoria*

Equivalências e Consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia

Samuel G. da Silva^a

^a Universidade Federal da Bahia (Prof. Associado I), *Email:* samuel@ufba.br

1. Introdução.

A Hipótese do Contínuo – conjecturada por Cantor nos anos 1880, e muito provavelmente a mais célebre asserção matemática cuja independência dos axiomas usuais da Teoria dos Conjuntos já foi demonstrada – declara que, dado um subconjunto infinito S da reta real, então devemos ter ou $S \approx \mathbb{N}$ ou $S \approx \mathbb{R}$. Neste minicurso, descreveremos o contexto que levou Cantor a enunciar a sua conjectura (a qual foi resultado de uma série de tentativas de exibir algum subconjunto da reta com cardinalidade intermediária entre \aleph_0 e \mathfrak{c}) e apresentaremos com detalhes algumas equivalências e consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia (entre outros resultados clássicos, discutiremos: a Decomposição de Sierpiński ([13]); os Dardos de Freiling ([3]); a Família das Funções Inteiras de Erdős ([2]); e ainda os argumentos de Katětov ([7]) e Jones ([6]) sobre os tamanhos dos fechados e discretos em espaços normais). Mostraremos ainda que determinados fatos básicos de Topologia Geral, presentes em qualquer curso em nível de graduação, acabam resultando em proposições indecidíveis para a Matemática se investigamos as asserções análogas que se obtém simplesmente trocando \aleph_0 por \aleph_1 ([15]). Discutiremos ainda uma certa alternativa à Hipótese do Contínuo (o *Axioma de Martin*, [9] e [12]) e encerraremos discutindo e apresentando resultados bastante recentes, todos relacionados ao chamado “primeiro problema de Hilbert” – o *Problema do Continuum*.

2. A Hipótese do Contínuo.

Nos anos 1880, Cantor estabeleceu a não-enumerabilidade da reta, e, mais geralmente, obteve a desigualdade estrita $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ para qualquer conjunto X , resultado conhecido como *Teorema de Cantor*, demonstrado a partir do uso do célebre *argumento diagonal*. Em seguida, Cantor passou a analisar as cardinalidades de vários tipos específicos de subconjuntos infinitos da reta, e observou que esses conjuntos ou eram enumeráveis ou tinham a cardinalidade da própria reta. Por exemplo, os subconjuntos fechados e não-enumeráveis da reta real possuem, necessariamente, número cardinal \mathfrak{c} . Em seus estudos, Cantor não conseguia “produzir”, ou “exibir”, nenhum subconjunto da reta real que tivesse uma cardinalidade intermediária entre aquela dos naturais e aquela dos reais. Motivado por essas tentativas, Cantor conjecturou a chamada Hipótese do Contínuo (usualmente denotada na literatura por **CH**, de *Continuum Hypothesis*):

CH = Não existe um subconjunto S da reta real cujo número cardinal seja maior do que \aleph_0 e menor do que \mathfrak{c} .

Colocado na linguagem de cardinais, o que CH diz é que $\mathfrak{c} = \aleph_1 = \omega_1$, onde \aleph_1 é o menor cardinal não-enumerável (i.e., o menor cardinal que é estritamente maior que \aleph_0).

Aproximadamente 20 anos depois da apresentação da conjectura por Cantor, a Hipótese do Contínuo já entrava definitivamente para a história da Matemática, quando Hilbert, em seu célebre discurso em Paris em 1900, colocou a determinação da validade dessa hipótese como sendo o primeiro de uma lista de 23 problemas que deveriam guiar os rumos da matemática no século XX: com isso, resolver o chamado *Problema do Continuum* se tornou conhecido, para a comunidade matemática, como sendo o “primeiro problema de Hilbert”. E efetivamente, como observou di Prisco ([11]), a Hipótese do Contínuo “tem guiado o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos por mais de um século”.

Nos anos 20 e 30 do séc. XX, a escola polonesa obteve alguns resultados interessantes. Sierpiński, em um texto que hoje é considerado um clássico ([13]), mostrou que **CH** é equivalente à existência de uma decomposição do plano em dois conjuntos disjuntos A e B tais que as seções horizontais de A e as seções verticais de B são conjuntos enumeráveis: esse resultado ficou conhecido na literatura como a *Decomposição de Sierpiński*. A partir dessa decomposição, ele deduziu várias outras equivalências para **CH**. Um colaborador da escola polonesa, o russo Luzin, na mesma época provou que, assumindo **CH**, existem determinados *subconjuntos especiais da reta* que hoje são conhecidos como Conjuntos de Luzin: subconjuntos não-enumeráveis dos reais cuja intersecção com qualquer conjunto de primeira categoria (*magro*) é enumerável. Os análogos dos conjuntos de Luzin para a Teoria da Medida são os chamados Conjuntos de Sierpiński (subconjuntos não-enumeráveis cuja intersecção com qualquer conjunto de medida nula é enumerável): esses conjuntos também podem ser construídos se assumimos **CH**. Luzin estudou ainda várias consequências da chamada *hipótese do contínuo fraca*, denominação dada à desigualdade $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ (que claramente é uma consequência de **CH**, porém é consistentemente mais fraca).

Ainda nos anos 30, Gödel deu uma grande contribuição ao Problema do Continuum: ele demonstrou que se a Teoria dos Conjuntos for consistente (i.e., não deduzir nenhuma contradição), então ela continua consistente se acrescentarmos a Hipótese do Contínuo. Em particular, isso mostra que a Hipótese do Contínuo não pode ser refutada. Gödel obteve esse resultado através da construção de um determinado modelo, o chamado modelo construtível de Gödel, denotado por **L**. O modelo construtível também mostrou que o Axioma da Escolha não pode se refutado.

Já em 1963 (há aproximadamente 50 anos, portanto¹), Cohen desenvolveu o método de forcing para obter um modelo da Teoria dos Conjuntos no qual tanto a Hipótese do Contínuo como o Axioma da Escolha não são válidos, o que, em conjunção com os resultados anteriores de Gödel, demonstraram que tais princípios são independentes da axiomatização de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos. Isso, num determinado ponto de vista (com o qual este proponente concorda), resolve completamente o Problema do Continuum – exatamente por demonstrar que o mesmo é insolúvel. Não havendo como demonstrar ou refutar a Hipótese do Contínuo, o que nos resta é encarar tanto **CH** como sua negação como princípios combinatórios consistentes e estudar suas consequências. No entanto, para outros matemáticos, o que os resultados de Gödel e Cohen mostram é que os axiomas usuais da Teoria dos Conjuntos é que são, de certa maneira, “fracos” – por não terem a força suficiente para decidir o Problema do Continuum. Nessa linha, vários pesquisadores vêm propondo a adoção de novos axiomas para a Teoria dos Conjuntos (veja no texto de di Prisco, [11], comentários sobre esses trabalhos,

¹Em 2008, aproveitamos os cem anos da publicação do Axioma da Escolha por Zermelo para publicar um artigo na Revista Matemática Universitária [5] e ministrar vários minicursos sobre princípios de escolha pelo país; esperamos fazer atividades similares para os 50 anos da independência da Hipótese do Contínuo, com artigos, minicursos e orientação de dissertações de mestrado a respeito do tópico.

devidos a, entre outros, Foreman, Magidor e Shelah (1988) e Woodin (2001)). Muito curiosamente, a maioria dos novos axiomas que são propostos são tais que $\mathfrak{c} = \aleph_2$. Estamos, no entanto, muito longe de um consenso sobre quais seriam os novos “axiomas naturais” para a Teoria dos Conjuntos que eventualmente decidiriam o Problema do Continuum. Como exemplo da polêmica que envolve essa busca por novos axiomas, em 1986 Chris Freiling ([3]) exibiu determinados axiomas que, justificados por um argumento probabilístico, (elegantemente descrito em termos de *jogar dardos na reta real*) poderiam ser encarados como “naturais”, sendo que um deles era exatamente equivalente à negação da Hipótese do Contínuo. Neste caso também houve muita polêmica e quase nenhum consenso².

Voltemos à época de Cohen: nos fins da década de 60, quando o método de forcing estava ainda recente, houve uma explosão de resultados de consistência e independência em Teoria dos Conjuntos. Nessa época, foi introduzido e começou a ser investigado em detalhes uma determinada “alternativa” a **CH** – o chamado *Axioma de Martin*.

O Axioma de Martin é um axioma combinatório, normalmente enunciado na linguagem de ordens parciais mas que possui um equivalente topológico que é bastante assemelhado ao Teorema de Baire: em sua versão topológica, o Axioma de Martin declara que todo espaço topológico compacto, Hausdorff e c.c.c.³ não pode ser escrito como a união de menos do que \mathfrak{c} fechados de interior vazio. O Axioma de Martin (usualmente denotado **MA**) é consistente com a negação de **CH**, e é encarado como uma espécie de “alternativa” a **CH** por dois motivos, que ocorrem praticamente com a mesma frequência (cf. [9] e [12]):

- **MA** pode ser usado para demonstrar a validade de certas consequências de **CH**. Como obviamente **CH** implica **MA** (note que **MA**, sob **CH**, é simplesmente o Teorema de Baire para compactos T_2 com a hipótese adicional c.c.c.), estamos obtendo os mesmos resultados com hipóteses consistentemente mais fracas. Um exemplo simples de tal fenômeno é o seguinte: sob **MA**, para todo cardinal $\kappa < \mathfrak{c}$ tem-se que $2^\kappa \leq \mathfrak{c}$.

Mais ainda: como **MA** + \neg **CH** (a conjunção do Axioma de Martin com a negação da Hipótese do Contínuo) é uma asserção consistente, um resultado que seja consequência de **CH** mas que possamos provar usando apenas **MA** é, portanto, um resultado do qual **CH** é independente - ou seja, tal consequência com certeza *não* é uma equivalência da Hipótese do Contínuo.

- por outro lado, vários resultados que são válidos sob **CH** podem ser demonstrados *não-válidos* sob **MA** + \neg **CH**: por exemplo, sob o Axioma de Martin e supondo a negação da Hipótese do Contínuo, com certeza não podem mais existir conjuntos de Luzin e de Sierpiński, pois pode-se provar que, se assumirmos **MA**, então qualquer subconjunto da reta de cardinalidade menor do que \mathfrak{c} é magro e tem medida nula. Notar que uma consequência de **CH** que é demonstrada não-válida sob **MA** + \neg **CH** é, em particular, uma proposição indecidível para a Matemática.

²Um aspecto bastante polêmico dos chamados “dardos de Freiling” é que o argumento envolvido costuma ser apresentado como uma “evidência empírica contrária à validade de **CH**”; como somos levados a acreditar e aceitar o argumento probabilístico dos dardos, nos vemos impelidos (por uma questão de coerência) a igualmente aceitar a sua proposição equivalente – no caso, a negação da Hipótese do Contínuo.

³Um espaço topológico é dito c.c.c. se não possui famílias não-enumeráveis de abertos dois-a-dois disjuntos.

O ponto de vista moderno para o trabalho em Topologia Conjuntística é considerar tanto **CH** como **MA** + \neg **CH** como princípios combinatórios consistentes e estudar suas consequências e equivalências.

O trabalho de pesquisa do proponente do presente minicurso é centrado no estudo e investigação de como hipóteses conjuntistas possuem influência em Topologia Geral. Por exemplo, desde o seu doutoramento ([14]) e por toda a sua carreira, inclusive em publicações recentes ([10]), o proponente vem realizando várias investigações sobre classes de espaços topológicos nos quais o tamanho dos conjuntos fechados e discretos sejam de alguma forma limitadas pelo tamanho de seus subconjuntos densos: isso envolve o estudo de um determinado teorema clássico envolvendo combinatória e topologia, o chamado Lema de Jones. Uma aplicação imediata do Lema de Jones nos garante que, sob **CH**, espaços normais e separáveis não podem conter fechados e discretos não-enumeráveis. Já sob **MA** + \neg **CH**, existem espaços normais e separáveis com fechados e discretos não-enumeráveis. Esse é um exemplo clássico: temos aí uma questão de Topologia Geral que, apesar de poder ser facilmente enunciada, possui respostas distintas dependendo do ambiente (consistente) de Combinatória Infinitária escolhido: sob a Hipótese do Contínuo temos uma situação e, sob o Axioma de Martin em conjunção com a negação da Hipótese do Contínuo, temos outra.

A Hipótese do Contínuo é, também, uma questão praticamente incontornável quando são discutidas as diferenças entre as noções de “enumerável” e “não-enumerável”; é comum encontrarmos em Matemática (mesmo em questões básicas de Topologia e de Análise) argumentos envolvendo cardinalidades e nos quais o ponto principal é a afirmação “ \mathbb{R} é não-enumerável”. No entanto, pequenas variações desses mesmos argumentos podem levar a questões indecidíveis para a Matemática, simplesmente trocando \aleph_0 por \aleph_1 . No artigo [15], o proponente deste minicurso apresentou duas famílias infinitas de equivalências para a Hipótese do Contínuo – e tais equivalências foram baseadas em fatos básicos de Topologia e Análise, os quais são discutidos em cursos de graduação. Por exemplo, a afirmação “Se A é um subconjunto do plano de tamanho \aleph_1 , então o complementar de A com relação ao plano é conexo por caminhos” é uma proposição indecidível para a Matemática, pois envolve, intrinsecamente, considerações sobre a Hipótese do Contínuo.

3. Descrição do curso. No que segue, apresentamos uma breve descrição dos conteúdos previstos para três sessões de duas horas. Dependendo do ritmo dos participantes, alguns tópicos podem ser adiantados ou postergados com relação à divisão das sessões. As referências básicas de Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos são [1], [4] e [8].

3.1 Primeira sessão.

Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. O Teorema de Cantor.

Teoria dos Conjuntos: ordinais e cardinais.

Enunciado da Hipótese do Contínuo (enunciado original de Cantor, enunciado por cardinais).

Contexto da Hipótese do Contínuo: o Teorema de Cantor-Bendixson.

As noções de consistência e independência em Matemática.

O Modelo Construtível, consistência de **CH**. O forcing de Cohen, independência de **CH**.

A Hipótese do Contínuo e as construções por recursão: os conjuntos de Luzin e de Sierpiński.

3.2 Segunda sessão.

Equivalências e Consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia:

- A Decomposição de Sierpiński ([13])
- Os Dardos de Freiling ([3])
- A Família das Funções Inteiras de Erdős ([2])
- Sobre os fechados e discretos de espaços normais: o argumento de Katětov ([7]) e o Lema de Jones ([6])

3.3 Terceira sessão.

Quando a diferença entre os conceitos de “enumerável” e “não-enumerável” acaba dependendo da Hipótese do Contínuo ?

Duas famílias infinitas de equivalências para a Hipótese do Contínuo ([15])

Uma alternativa à Hipótese do Contínuo: o Axioma de Martin. ([9], [12])

O *Problema do Continuum* ainda está em aberto ?

Em caso positivo: – Estamos próximos de resolver o Problema do Continuum ? ([11])

Referências

- [1] Engelking, R. (1989) *General Topology*. rev. compl. ed., Berlin, Heldermann (Sigma Series in Pure Mathematics, 6), viii + 529 pp.
- [2] Erdős, P. (1964) *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, The Michigan Mathematical Journal, **11**, 9–10.
- [3] Freiling, C. (1986) *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real number line*. Journal of Symbolic Logic, **51**, 1, 190–200.
- [4] Jech, T. (2003) *Set theory –The third millennium edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, xiv+769.
- [5] de Jesus, J. P. C., e da Silva, S. G. (2007) *Cem Anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff*. Revista Matemática Universitária (RMU/SBM), **42**, 16–34.
- [6] Jones, F.B. (1937) *Concerning normal and completely normal spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society, **43**, 671-677.
- [7] Katětov, M. (1951) *Measures in fully normal spaces*, Fundamenta Mathematicae, **38**, 73–84.

- [8] Kunen, K. (1983) *Set theory – An introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, xvi+313.
- [9] Martin, D. A., e Solovay, R. M. (1970) *Internal Cohen extensions*. Annals of Pure and Applied Logic, **2** (2), 143–178.
- [10] Morgan, C. J. G. e da Silva, S. G. (2012) *Constraining extent by density: on generalizations of normality and countable paracompactness*. Bol. Soc. Mat. Mexicana, Tercera Serie, **18**, 1, 43–54
- [11] di Prisco, C. A. (2005) *Are we closer to a solution of the Continuum Problem ?*. Revista Manuscrito, **28**, 2 (2005), 331–350.
- [12] Rudin, M. E. (1977) *Martin’s Axiom B.6* in *Handbook of Mathematical Logic*, Barwise, J. (ed), Elsevier Science, Amsterdam, 491–501.
- [13] Sierpiński, W. (1934) *Hypothèse du Continu*. Monografie Matematyczne, 1 ère ed. PWN, Varsóvia. v + 192 pp.
- [14] da Silva, S. G. (2004) *Alguns resultados envolvendo cardinais e uma determinada propriedade topológica*. Tese de Doutorado, IME/USP, iv + 108 pp.
- [15] da Silva, S. G. (2014) *Two infinite families of equivalences of the continuum hypothesis*. Matematichki Vesnik, 66, 1, 109–112.